Prednáška 12

K najdôležitejším klasickým výsledkom diferenciálneho a integrálneho počtu patrí nepochybne Greenova, Gaussova a Stokesova veta, ktoré majú dôležité aplikácie vo fyzike a v rade matematických teórií. Veľmi zhruba možno povedať, že tieto vety hovoria, že istý integrál cez množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ je rovný istému príslušnému integrálu cez hranicu M tejto množiny a že ide o zovšeobecnenie Newtonovej-Leibnizovej formuly $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$. Pre formuláciu spomenutých viet je treba zaviesť tzv. integrály na varietách.

12.1. Krivkové integrály

V tejto kapitole uvedieme definíciu a základné vlastnosti krivkový integrálov I. druhu a II. druhu. Ukážeme si metódy ich výpočtu a na záver kapitoly popíšeme ich geometrické a fyzikálne aplikácie. Majme jednoduchú krivku v $\mathbb{R}^2$. Zrejme pre malé Δt je $\|\phi'(t_0)\|\Delta t$ približne rovné dĺžke kúsku krivky medzi bodmi $\phi(t_0)$ a $\phi(t_0 + \Delta t)$. Nech ďalej $\rho(x)$ je hustota nejakej veličiny m (napr. hmoty) na danej krivke, tj.

$$\rho(x) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{m(x, \Delta s)}{\Delta s},$$

kde $m(x, \Delta s)$ je množstvo veličiny m na kúsku geometrického obrazu danej krivky, začínajúceho v x s dĺžkou Δs. Potom množstvo veličiny m na tomto kúsku je približne rovné

$$\rho(x)\Delta s = \rho(\phi(t_0))\|\phi'(t_0)\|\Delta t, \quad x = \phi(t_0).$$

Teda ak interval $[a, b]$ "rozumne" rozdelíme, dostaneme

$$\int_\phi \rho(x)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \rho(\phi(t))\|\phi'(t)\|\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=1}^n \rho(\phi(t_i))\|\phi'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}),$$

a teda tento integrál nám dáva množstvo veličiny m na danej krivke.

Definícia 12.1.1.

Nech (X, d) je metrický priestor, potom dĺžkou krivky $\gamma : [a, b] \to X$ nazývame

$$l(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) : n \in \mathbb{N} \text{ a } a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\},$$

kde supremum berieme cez všetky n a všetky delenia $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ intervalu $[a, b]$. Rektifikovateľná krivka je krivka s konečnou dĺžkou.

Veta 12.1.2.

Ak $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je Lipschitzovsky spojitá, tak je rektifikovateľná .

Poznámka 12.1.3.

V tejto kapitole uvažujeme len tzv. lokálne rektifikovateľné krivky, tj. krivky, ktoré majú konečnú dĺžku na každom končenom podintervale (nazývané aj $\sigma-$konečné).

Definícia 12.1.4.

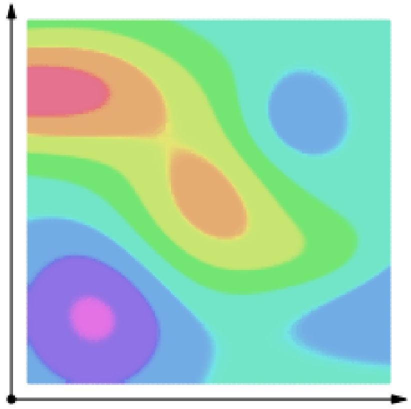
Nech krivka ϕ s parametrizáciou $\mathbf{x} : [a, b] \to \mathbb{R}^m, a, b \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$) je po častiach C^1 a $f : \phi \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Potom definujeme krivkový integrál 1. druhu predpisom

$$\int_{\phi} f \, \mathrm{d}s := \int_a^b f(\mathbf{x}(t)) \|\mathbf{x}'(t)\| \, \mathrm{d}t,$$

ak integrál na pravej strane existuje (ako Lebesgueov integrál).

Poznámka 12.1.5.

Pre existenciu $\int_\phi f \, \mathrm{d}s$ je zrejme nutné, aby hodnota $f(\mathbf{x}(t))$ bola definovaná pre s.v. $t \in [a, b]$.
Ak je f spojitá funkcia, potom $\int_\phi f \, \mathrm{d}s$ existuje.
Krivkový integrál $\int_\phi 1 \, \mathrm{d}s$ nazývame dĺžka krivky ϕ (definícia je ekvivalentná s definíciou pomocou suprém dĺžok vpísaných lomených čiar).



Obr. 12.1: Prevedenie krivkového integrálu 1. druhu na jednoduchý integrál.

Princíp výpočtu krivkového integrálu 1. druhu spočíva v tom, že ho prevedieme na jednoduchý integrál, v ktorom bude premennou parameter t a integračným oborom obor daného parametra, viď obrázok 12.1.

Príklad 12.1.6.

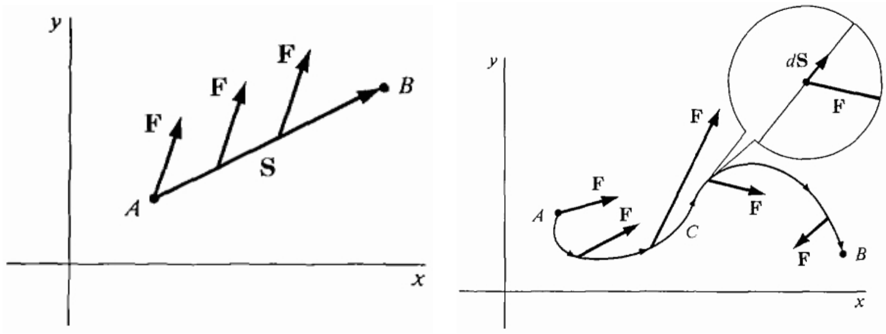
Máme spočítať

$$I = \int_\phi (x + 2y)\,\mathrm{d}s,$$

kde krivka ϕ je daná predpisom $(1 - t, t),\ t \in [0, 1]$. Je to jednoduchá krivka (úsečka). Podľa definície je

$$I = \int_0^1 \sqrt{2}(1 + t)\,\mathrm{d}t = 3\sqrt{2}/2.$$

Definícia krivkového integrálu 2. druhu je v princípe rovnaká a podobne je to aj pri výpočtoch daných integrálov. Dôležitý rozdiel medzi integrálom 1. a 2. druhu je, že prvý z nich nezávisí na orientácii danej krivky, zatiaľ čo u druhého z nich je táto orientácia podstatná. Krivkový integrál 2. druhu fyzikálne vyjadruje veľkosť práce, ktorú vykoná sila $\mathbf{F} : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ po orientovanej krivke C z bodu A do bodu B (v podstate máme stacionárne silové pole, teda závisiace iba na polohe, nie na čase). Aktívnu prácu pri pohybe po krivke tvorí iba zložka sily $\mathbf{F}$ v smere pohybu, ktorý je dotykovým vektorom ku krivke C v danom bode krivky. Tento dotykový jednotkový vektor $\mathbf{t}$ môžeme vyjadriť pomocou prírastkov $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2$ ako $\mathbf{t} = \frac{(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2)}{\mathrm{d}s}$, $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x_1)^2 + \mathrm{d}x_2)^2}$. Potom celková práca W je daná ako súčet pôsobenia súčinu projektovaného vektora sily $\mathbf{F}$ do smeru pohybu $\mathbf{t}$ a elementárnej



(a) Práca vykonaná pôsobením konštantnej sily po úsečke. (b) Práca vykonaná pôsobením nekonštantnej sily po krivke.

Obr. 12.2: Krivkový integrál 2. druhu.

dĺžky $\mathrm{d}s$, tj.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{t}\,\mathrm{d}s = \int_C F_1\,\mathrm{d}x_1 + F_2\,\mathrm{d}x_2.$$

Definícia 12.1.7.

Nech krivka krivka ϕ s parametrizáciou $\mathbf{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^m, a, b \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^*)$ je po častiach C^1 a $\mathbf{f} : \phi \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Potom definujeme krivkový integrál 2. druhu predpisom

$$\int_\phi \mathbf{f}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i := \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{x}'(t)\,\mathrm{d}t.$$

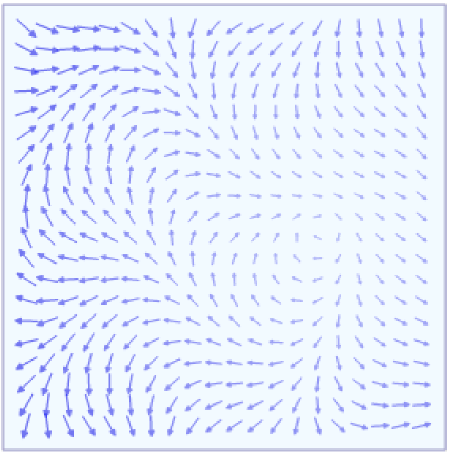
Poznámka 12.1.8.

Integrál možno zapísať aj v tvare

$$\int_\phi \mathbf{f}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}(t))u_i(t)\|\mathbf{x}'(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

kde $\mathbf{u}(t)$ je jednotkový dotykový vektor ku krivke ϕ v bode $\mathbf{x}(t)$, a preto výraz $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{u}(t)$ má význam dotykovej zložky poľa $\mathbf{f}$.

Takéto vyjadrenie tiež ukazuje, že vo všeobecnosti môžeme tento integrál napísať ako integrál 1. druhu z funkcie $F(\mathbf{s}) = \mathbf{f}(\mathbf{s})\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{s}))$, viď vetu 12.1.23.



Obr. 12.3: Prevedenie krivkového integrálu 2. druhu na jednoduché integrály.

Príklad 12.1.9.

Majme $\mathbf{f} = (y, z, x)$. Vypočítajme integrál $I = \int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde C je jeden závit šrúbovice $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, t \in [0, 2\pi]$. Priamo z definície máme

$$I = \int_0^{2\pi} a\sin t\frac{\mathrm{d}a\cos t}{\mathrm{d}t} + bt\frac{\mathrm{d}a\sin t}{\mathrm{d}t} + a\cos t\frac{\mathrm{d}bt}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} ab(1+t)\cos t - a^2\sin^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\pi a^2.$$

Pozrime sa na základné vlastnosti krivkových integrálov.

Definícia 12.1.10.

Súčtom dvoch kriviek k_1, k_2, kde $k_i : I_i = [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n, i = 1, 2,\ \ k_1(b_1) = k_2(a_2)$ nazývame krivku $\gamma : J = [a_1, c_1] \to \mathbb{R}^n,\ c_1 = b_1 + b_2 - a_2$, ktorá je daná predpisom

$$k(t) = \begin{cases} k_1(t), & t \in I_1, \\ k_2(a_2 + t - b_1), & t \in J \setminus I_1 = [b_1, c_1]. \end{cases}$$

Označujeme ju $k = k_1 \oplus k_2$. Opačnú krivku ku krivke $k : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ nazývame krivku $\ominus k$, kde interval I a parametrizácia sa zmení na na $k(-t), t \in [-b, -a]$.

Nasledujúca veta je priamym dôsledkom definície daných integrálov a vlastností Lebesgueovho intergálu.

Veta 12.1.11 (Linearita krivkových integrálov)**.**

Ak majú $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ integrál cez krivku ϕ, potom pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{C}$ má cez ňu aj integrál $a\,\mathbf{f} + b\,\mathbf{g}$ a platí

$$\int_\phi (a\,\mathbf{f} + b\,\mathbf{g}) \cdot\, \mathrm{d}\mathbf{r} = a \int_\phi \mathbf{f} \cdot\, \mathrm{d}\mathbf{r} + b \int_\phi \mathbf{g} \cdot\, \mathrm{d}\mathbf{r},$$

$$\left(\int_\phi (a\,f + b\,g)\,\mathrm{d}s = a \int_\phi f\,\mathrm{d}s + b \int_\phi g\,\mathrm{d}s. \right)$$

Veta 12.1.12 (Integrál cez súčet kriviek)**.**

Majme definovaný súčet kriviek $\psi \oplus \phi$. Ak má $\mathbf{f}$ integrál cez obe krivky a aj ich súčet, potom platí

$$\int_{\psi\oplus\phi} \mathbf{f} \cdot\, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\phi \mathbf{f} \cdot\, \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_\psi \mathbf{f} \cdot\, \mathrm{d}\mathbf{r},$$

$$\left(\int_{\psi\oplus\phi} f\,\mathrm{d}s = \int_\phi f\,\mathrm{d}s + \int_\psi f\,\mathrm{d}s \right).$$

Veta 12.1.13 (Integrál po regulárnej transformácii)**.**

Nech ϕ je C^1 krivka a nech $\xi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je C^1 zobrazenie s $\xi' \neq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom pre krivku $\psi := \phi \circ \xi$, platí

$$\int_{\psi} f \, \mathrm{d}s = \int_{\phi} f \, \mathrm{d}s,$$

$$\int_{\psi} \mathbf{f} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \pm \int_{\phi} \mathbf{f} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r},$$

kde znamienko nám definuje $\mathrm{sgn}(\xi')$.

Dôsledok 12.1.14.

1. $\int_{\phi} \mathbf{f} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\phi_a} \mathbf{f} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r}, \quad \phi_a(t) = \phi(t + a)$
2. $\int_{\phi} \mathbf{f} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{\ominus\phi} \mathbf{f} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r}$
3. $\int_{\phi\ominus\phi} \mathbf{f} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$

Dôsledok 12.1.15.

1. $\int_{\phi} f \, \mathrm{d}s = \int_{\phi_a} f \, \mathrm{d}s, \quad \phi_a(t) = \phi(t + a)$
2. $\int_{\phi} f \, \mathrm{d}s = \int_{\ominus\phi} f \, \mathrm{d}s$
3. $\int_{\phi\ominus\phi} f \, \mathrm{d}s = 2 \int_{\phi} f \, \mathrm{d}s$

Dôsledok 12.1.16.

Nech ϕ, ψ sú jednoduché (prosté) krivky dané parametricky (na I, J), pričom $H_\phi = H_\psi$. Ak ϕ^{-1} alebo ψ^{-1} je spojité, potom existuje práve jedna rýdzo-monotónna funkcia $\chi : J \to I$ tak, že $\psi(t) = \phi(\chi(t)), \ t \in J$ a

$$\int_{\phi} \mathbf{f} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \pm \int_{\psi} \mathbf{f} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Dôsledok 12.1.17.

Nech ϕ, ψ sú uzavreté jednoduché krivky dané parametricky (na I, J), pričom $H_\phi = H_\psi$. Potom

$$\oint_\phi \mathbf{f} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \pm \oint_\psi \mathbf{f} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Pozrieme sa teraz na vzťah medzi potenciálnosťou vektorového poľa a vlastnosťami krivkového integrálu 2. druhu. Význam týchto znalostí je dvojaký, budeme vedieť ľahko počítať krivkové integrály a taktiež (teoreticky) hľadať potenciály daných polí.

Lema 12.1.18.

Nech U je potenciál spojitého poľa $\mathbf{T}$ na otvorenej množine $G \subset \mathbb{R}^m$. Potom pre každú krivku k, ležiacu v G (tj. $H_k \subset G$) platí

$$\int_k \mathbf{T} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{r} = U(k(b)) - U(k(a)).$$

Povieme, že krivkový integrál z vektorového poľa $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^n$ nezávisí v $B \subset A$ na integračnej ceste, keď pre ľubovolné dve orientované po častiach regulárne krivky k_1, k_2, ktoré ležia v B majú spoločné začiatočné a koncové body a platí

$$\int_{k_1} \mathbf{F} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{k_2} \mathbf{F} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Lema 12.1.19.

Nech $\mathbf{T}$ je spojité pole na otvorenej množine $G \subset \mathbb{R}^m$. Potom

$$\oint_k \mathbf{T} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

pre každú uzavretú krivku k, ležiacu v G práve vtedy, ak krivkový integrál poľa $\mathbf{T}$ nezávisí na ceste.

Veta 12.1.20 (Vzťah potenciálnosti poľa a krivkového integrálu)**.**

Nech **T** je spojité pole na otvorenej množine $G \subset \mathbb{R}^m$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné

1. **T** má na G potenciál.
2. $\int_\phi \mathbf{f} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ pre každú uzavretú krivku ϕ ležiacu v G.
3. Krivkový integrál poľa **T** nezávisí v G na ceste.

Poznámka 12.1.21.

Pozor, nevyjasnili sme si vzťah potenciálnosti poľa **T** k vlastnosti $\operatorname{rot} \mathbf{T}$ na množine G. Tá nemôže byť ľubovoľná (otvorená). Odpoveď na takúto otázku dostaneme neskôr.

Príklad 12.1.22 (Použitie potenciálu)**.**

Nech $I = \int_\phi x \, \mathrm{d}y + y \, \mathrm{d}x$, kde ϕ je krivka z bodu $A = [-1, 2]$ do bodu $B = [2, 3]$. Keďže integrand je v tvare totálneho diferenciálu (s potenciálom xy) máme $I = [xy]_A^B = 6 + 2 = 8$.

Nasledujúce tvrdenie nám hovorí, že je možné previesť krivkový integrál z vektorovej funkcie na krivkový integrál z vhodnej skalárnej funkcie, ktorého výpočet môže byť niekedy jednoduchší.

Veta 12.1.23 (Vzťah krivkových integrálov)**.**

Nech k je krivka (orientovaná), **F** vektorové pole a **t** jednotkový dotykový vektor, potom

$$\pm \int_k \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_k \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}s,$$

ak aspoň jeden z integrálov existuje.

Príklad 12.1.24.

Nájdime $I = \int_k 2\,\mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y + \,\mathrm{d}z$, kde k je úsečka určená bodmi $A = [1, 0, 2]$ a $B = [2, 1, 1]$ orientovaná od A do B. Prevedieme teda integrál na integrál 1. druhu. Parametrické rovnice úsečky sú $\mathbf{r}(t) = (1 + t, t, 2 - t)$, $t \in [0, 1]$. Teda $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{3}$ a $\mathbf{t} = (1, 1, -1)/\sqrt{3}$. Zobrazenie $\mathbf{F} = (2, -3, 1)$ a $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} = -2/\sqrt{3}$. Orientácia k je súhlasná s parametrizáciou a teda

$$I = \int_k -2/\sqrt{3}\,\mathrm{d}s = -2/\sqrt{3}\lambda_1(k) = -2.$$

Pozrieme sa aj na správne odhady krivkových integrálov.

Poznámka 12.1.25.

Nech l_ϕ je dĺžka krivky ϕ. Na základe viet o nerovnostiach medzi integrálmi dostaneme

$$\left|\int_\phi f\,\mathrm{d}s\right| \le \int_a^b |f(\phi(t))|\,\|\phi'(t)\|\,\mathrm{d}t \le \max_{H_\phi} |f| \int_a^b \|\phi'(t)\|\,\mathrm{d}t = \max_{H_\phi} |f|\, l_\phi,$$

$$\left|\int_\phi \mathbf{f}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r}\right| \le \int_a^b |\mathbf{f}(\phi(t))\cdot\phi'(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \|\mathbf{f}\|\,\|\phi'\|\,\mathrm{d}t = \int_\phi \|\mathbf{f}\|\,\mathrm{d}s \le \max_{H_\phi} \|f\|\, l_\phi.$$

Nezmyselný je odhad

$$\left|\int_\phi \mathbf{f}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r}\right| \le \max_{H_\phi} \|f\| \int_\phi \mathbf{1}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r},$$

prečo?

Uvedieme si ešte klasické aplikácie vo fyzike a geometrii.

Buď ρ hustota jednoduchej krivky ϕ v $\mathbb{R}^3$. Potom

(a) $m = \int_\phi \rho\,\mathrm{d}s$ je jej celková hmotnosť,

(b) $T_i = \frac{1}{m}\int_\phi x_i\rho\,\mathrm{d}s$ sú súradnice jej ťažiska (hmotného stredu),

(c) $I_p = \int_\phi D^2\rho\,\mathrm{d}s$ je jej moment zotrvačnosti vzhľadom k priamke p, kde D je vzdialenosť od neho k bodu $[x, y, z]$,

(d) $I_{xy} = \int_\phi z^2 \rho \,\mathrm{d}s$ je jeho moment zotrvačnosti vzhľadom k rovine xy (obdobne I_{yz}, I_{xz}),

(e) $\overline{\rho} = \frac{1}{l_\phi} \int_\phi \rho \,\mathrm{d}s$ je priemerná hustota na danej krivke

(f) $W = \int_\phi \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ je práca vykonaná pozdĺž danej krivky v silovom poli so silovým vektorom $\mathbf{F}$;